数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 53-61

Rankin-Selberg L関数の zero-free region
―Siegel-Tatuzawa型の定理について―

名古屋大・多元数理　市原由美子 (Yumiko Ichihara)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Dirichlet L関数について以下のように zero-free region が知られている。

定理1. χ を mod d の primitive Dirichlet character とする。この時
$$\exists c>0 \quad \text{s.t.} \quad L(s,\chi)\neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma > 1-\frac{c}{\log(d(|t|+2))}$$
ここで $s=\sigma+it$ である。また χ が単位指標でない実指標の時は実軸上においては高さ1つの例外を除いて成立する。

この定理における高さ1つの例外の real zero を Siegel zero と呼び、それが存在しないことを示すことが多くの人の望みとなっている。さて、χ が実指標の時の real zero が問題になっているわけだが、$s=1$ 近くには real zero が存在しないことが Siegel の定理 と呼ばれる次の定理によって分かっている。

定理2. χ を mod d の real primitive Dirichlet character とする。この時 $^{\forall}\varepsilon>0$ に対して $^{\exists}c(\varepsilon)>0$
$$\text{s.t.} \quad L(\sigma,\chi)\neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma > 1-\frac{c(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}$$

ただ、この定理で与えられた定数 $c(\varepsilon)>0$ は具体的に計算できるわけではなく、あくまで理論上の存在が保障されたにすぎない。計算可能な定数で実軸上の zero-free region は次のように1951年に Tatuzawa [9] によって示された。これは定理2とあわせて Siegel-Tatuzawa の定理 と呼ばれる。

定理3. $^\forall\varepsilon>0$ に対し effective な正定数 $^\exists C(\varepsilon)>0$
s.t. $L(1,\chi) > \dfrac{C(\varepsilon)}{d^\varepsilon}$
ここで d は χ の conductor であり、この主張は高々1つの例外を除き全ての real primitive character χ に対して成り立つ。

この主張からすぐに高々1つの例外を除き、real character χ について $L(s,\chi)$ の実軸上の zero-free region が計算可能な正定数 $C'(\varepsilon)>0$ で

$$L(\sigma,\chi)\neq 0 \quad \text{in} \quad 1-\frac{C'(\varepsilon)}{d^\varepsilon}\leq\sigma$$

と与えられることが導ける。

以上が現在分かっている zero-free region であり、Siegel zero の非存在や Siegel-Tatuzawa の定理において例外なしに effective な正定数で zero-free region を与えることは大きな問題となっている。

さて、上記の3つの定理を導くための議論は古典的なものである。それは Dirichlet L 関数が Euler 積を持つことを利用し、ある正値性を持つ補助関数を導入して展開される。特に定理 2, 3 については次の補助関数

$$\psi(s,\chi_1,\chi_2)=\zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2) \qquad \chi_i:\text{real},\ \chi_1\chi_2\neq\text{trivial}$$

の Dirichlet 級数展開の係数の正値性を用いる。この正値性は

$$\log\psi(s,\chi_1,\chi_2)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}(1+\chi_1^m(p))(1+\chi_2^m(p))\,m^{-1}p^{-ms}$$

において p^{-ms} の係数が正であることからすぐに分かる。逆に言えば、p^{-ms} の係数が正になるように $\zeta(s)L(s,\chi_1)$ という積を作ったのである。(χ_1, χ_2 を考える理由は証明のテクニカルな部分に依る。Davenport [1] 参照)。

つまり、Euler積を持ち、Dirichlet L関数に似た性質を持つL関数については、この古典的な議論やその類似により zero-free region を non-trivial な範囲に広げることが可能となる場合がある。その一例として Rankin-Selberg L関数の zero-free region を紹介する。

まず Rankin-Selberg L関数を定義する。ここでは扱いやすい物として $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する Hecke eigen cusp form を考えることにする。f, g を $SL_2(\mathbb{Z})$ の重さ k, l の normalized Hecke eigen cusp form として、a_n, b_n をそれぞれの n-th Fourier 係数とする。この時、α_p, β_p を $\alpha_p+\overline{\alpha_p}=a_p$, $|\alpha_p|=p^{\frac{k-1}{2}}$, $\beta_p+\overline{\beta_p}=b_p$, $|\beta_p|=p^{\frac{l-1}{2}}$ なる複素数として、次のように Rankin-Selberg L関数 $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ を定義する。$Re(s)>1$ において、

$$L_{f\otimes g}(s,\chi)=\prod_p\left(1-\alpha_p\beta_p\chi(p)p^{-s-\frac{k+l}{2}+1}\right)^{-1}\left(1-\alpha_p\overline{\beta_p}\chi(p)p^{-s-\frac{k+l}{2}+1}\right)^{-1}$$
$$\left(1-\overline{\alpha_p}\beta_p\chi(p)p^{-s-\frac{k+l}{2}+1}\right)^{-1}\left(1-\overline{\alpha_p}\overline{\beta_p}\chi(p)p^{-s-\frac{k+l}{2}+1}\right)^{-1}$$

これは極を除き s-平面全体に解析接続される。極は $f=g$ かつ χ が単位指標の時のみ $s=1$ に1位の極を持つ。また関数等式を持つことも Li [6] により示されている。

この Rankin-Selberg L関数について

$$\log L_{f\otimes g}(s,\chi)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m+\left(\frac{\overline{\alpha_p}}{|\overline{\alpha_p}|}\right)^m\right)\left(\left(\frac{\beta_p}{|\beta_p|}\right)^m+\left(\frac{\overline{\beta_p}}{|\overline{\beta_p}|}\right)^m\right)\chi(p)m^{-1}p^{-ms}$$

が Euler 積より分かるので、$f=g$ であれば

$$\log L_{f\otimes f}(s,\chi)=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m+\left(\frac{\overline{\alpha_p}}{|\overline{\alpha_p}|}\right)^m\right)^2\chi(p)m^{-1}p^{-ms}$$

となり $\left(\left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m + \left(\frac{\overline{\alpha_p}}{|\overline{\alpha_p}|}\right)^m\right)^2 \geqq 0$ であることから、この $\alpha_p, \overline{\alpha_p}$ 達は悪い影響を与えることなく、Dirichlet L 関数の場合と全く同じ構成法を用いて、Dirichlet L 関数と全く同じタイプの補助関数をつくり、古典的議論で定理 1.2.3 と同様の主張を得ることができる。定理 1.2 については Perelli [8]（著者 [3] によって Perelli [8] の不十分な点は証明されている。[4] 参照）により得られており、定理 3 については [5] で紹介されている。

さて、$f=g$ の場合は zero-free region を調べるにあたって $\alpha_p, \overline{\alpha_p}$ の存在は邪魔にならなかったが、$f \neq g$ では $\left(\left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m + \left(\frac{\overline{\alpha_p}}{|\overline{\alpha_p}|}\right)^m\right)\left(\left(\frac{\beta_p}{|\beta_p|}\right)^m + \left(\frac{\overline{\beta_p}}{|\overline{\beta_p}|}\right)^m\right)$ の存在が影響して単純に Dirichlet L 関数の時の議論を適用できない。しかし、著者 [3] により $f \neq g$ の場合も $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の zero-free region が定理 1.2 の形で与えられている。（[3], [4] 参照）。そこで Siegel-Tatuzawa 型を考える。以下指標は全て実指標とする。さて、その前段階である定理 2 が $L_{f\otimes g}(s,\chi)$, $f \neq g$ の場合にどの様にして得られたのか振り返ってみよう。実はその証明は

$$\begin{aligned}\varphi(s,\chi_1,\chi_2) = {} & L_{f\otimes f}(s)\, L_{f\otimes f}(s,\chi_1)\, L_{f\otimes f}(s,\chi_2)\, L_{f\otimes f}(s,\chi_1\chi_2) \\ & \times \{ L_{f\otimes g}(s)\, L_{f\otimes g}(s,\chi_1)\, L_{f\otimes g}(s,\chi_2)\, L_{f\otimes g}(s,\chi_1\chi_2) \}^2 \\ & \times L_{g\otimes g}(s)\, L_{g\otimes g}(s,\chi_1)\, L_{g\otimes g}(s,\chi_2)\, L_{g\otimes g}(s,\chi_1\chi_2)\end{aligned}$$

という補助関数の導入がポイントになっていた。これは

$$\begin{aligned}\log \varphi(s,\chi_1,\chi_2) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} & \left\{ \left(\frac{\alpha_p}{|\alpha_p|}\right)^m + \left(\frac{\overline{\alpha_p}}{|\overline{\alpha_p}|}\right)^m + \left(\frac{\beta_p}{|\beta_p|}\right)^m + \left(\frac{\overline{\beta_p}}{|\overline{\beta_p}|}\right)^m \right\}^2 \\ & (1+\chi_1^m(p))(1+\chi_2^m(p))\, m^{-1} p^{-ms}\end{aligned}$$

となるように作られたもので、これによって $\log \varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ の p^{-ms} の係数の正値性から

$\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ の Dirichlet 級数展開における係数の正値性が導ける。
定理2の Siegel の定理は次を満たす補助関数を用いて証明できる。

$$
(*) \begin{cases}
① \ \text{Dirichlet 級数展開における係数} \geq 0, \ \text{初項} > 0 \\
② \ s=1 \text{ で極を持つ} \\
③ \ \{(s-1)^{-n},\ n \in \mathbb{N} \text{ の係数}\} \ll \{L\text{関数の } s=1 \text{ での値}\}\, d^{\varepsilon} \\
\quad (\text{ここで } \varepsilon > 0 \text{ で } d \text{ は指標の conductor})
\end{cases}
$$

$\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ はこの ①, ②, ③ を満たしており, $L_{f\otimes g}(s,\chi)$, $f \neq g$ についても古典的議論が適用され、定理2の主張が成立するのである。しかし、Siegel-Tatuzawa 型の定理3を得るためには この ①, ②, ③ よりも更に「良い性質」が必要とされる。それは次の性質である。

$$
(**) \begin{cases}
① \ \text{Dirichlet 級数展開における係数} \geq 0, \ \text{初項} > 0 \\
②' \ s=1 \text{ で奇数位数の極を持つ} \\
③' \ \text{留数} \ll \{L\text{関数の } s=1 \text{ での値}\}\, d^{\varepsilon}
\end{cases}
$$

((**) を用いての古典的な議論は Hoffstein-Lockhart [2] でまとめ直されている。)
Dirichlet L関数や $L_{f\otimes f}(s,\chi)$ の時に Siegel の定理 (定理2) を得るための補助関数 $\psi(s,\chi_1,\chi_2)$ は (*), (**) を共に満たしているのですぐに Siegel-Tatuzawa の定理 (定理3) が得られるが、$L_{f\otimes g}(s,\chi)$, $f \neq g$ についてはそうでなく、先に導入した $\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ は その因子である $L_{f\otimes f}(s)$, $L_{g\otimes g}(s)$ が $s=1$ で1位の極を持ち、$\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ は $s=1$ で2位の極を持つことになる。よって (**) において ②' は満たしていない。(ここで ③ と ③' は"あまり"違いのない条件であることを注意しておく。定義より $\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ が ① ③' を満たすことはすぐに分かる)。

ここで少し一般的なL関数、Euler積を持つL関数、についてコメントする。Euler積の性質を用いて補助関数を作る場合、①、②、③、③′を満たすものを作るのはたぶん可能であると思われる。これらの条件のうちで一番強い要求が②′の位数の奇数性である。今までこの奇数性を満たさないL関数についてSiegel-Tatuzawaの定理は議論されてはおらず、よって今回 $f \neq g$ の $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ という②′を満たさないものについてSiegel-Tatuzawa型の主張を具体的に与えたことは意味がある。これからその議論を紹介するが、この証明方法は他のL関数に対しても応用することができると著者は期待している。この証明は名古屋大学・多元数理科学研究科の松本耕二先生との共同研究である。([5]参照)

まず最初に次の2つの補助関数を導入する。

$$\varphi(s,\chi) = L_{f\otimes f}(s)L_{f\otimes f}(s,\chi)\{L_{f\otimes g}(s)L_{f\otimes g}(s,\chi)\}^2 L_{g\otimes g}(s)L_{g\otimes g}(s,\chi)$$

$$\varphi_0(s,\chi) = \zeta(s)\varphi(s,\chi)$$

ここで $\varphi(s,\chi)$ の構成は $\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ と全く同様であり、持っている性質も同じで、①、③′を満たし、$s=1$ で2位の極を持っている。$f \neq g$ での $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ のSiegel-Tatuzawa型定理の証明のポイントは、新しいタイプの補助関数 $\varphi_0(s,\chi)$ の導入とそれを用いた議論展開である。$\varphi_0(s,\chi)$ は単純にRiemann zetaを $\varphi(s,\chi)$ にかけることで①、②′の性質を持つように作られた。しかし、強引にRiemann zetaをかけたことで一般に③′を満たすかどうかは分からない。$\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$, $\varphi(s,\chi)$, $\varphi_0(s,\chi)$ を用いて $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ $f \neq g$ についても次のSiegel-Tatuzawa型の主張が示せた。

> **主定理.** $^\forall \varepsilon>0$ に対し、effective な正定数 $^\exists c(\varepsilon)>0$
>
> s.t. $$L_{f\cdot g}(1,\chi) > \frac{c(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}} \qquad (f \neq g)$$
>
> ここで d は χ の conductor であり、この主張は高々1つの例外を除き全ての real primitive character χ について成り立つ。

実際に証明を説明する前に準備として次の命題を紹介する。

> **命題** $\frac{3}{4} \leqq \beta < 1$ を fix する。この時 $^\exists c, c'>0$
>
> s.t. $$\frac{\tilde{\varphi}(\beta)}{r!} + \frac{\operatorname{Res}_{s=1} \tilde{\varphi}(s) \cdots d^{c(1-\beta)}}{(1-\beta)\cdots(1+r-\beta)} \geqq c' \qquad (r \text{は十分大})$$
>
> ここで $\tilde{\varphi}(s)$ は $\varphi(s,\chi)$, $\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ or $\varphi_0(s,\chi)$ である。

この命題は厳密に正しくはない。しかし、証明の本質は表しているので、これを用いて主定理の証明とする。命題の正しい statement は [5] を参照して頂きたい。

この命題は次の流れで示される。まず次の積分を考える

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{\tilde{\varphi}(s+\beta)x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)}\,ds$$

$\tilde{\varphi}(s)$ が ① を満たすことよりこの積分は下からある正定数で評価され、更に

$$\frac{\tilde{\varphi}(\beta)}{r!} + \operatorname*{Res}_{s=1-\beta}\left(\frac{\tilde{\varphi}(s+\beta)x^s}{s(s+1)\cdots(s+r)}\right) + O\left(d^{r'}x^{\frac{1}{2}-\beta}\right) \qquad r'\text{:定数}$$

と留数定理を用いて書き換えることができる。ここで $\beta>\frac{1}{2}$ に注意して、x として十分大な値 (r のみに依る) をとることにより O-term が十分小さくなり命題を得ることができる。(Hoffstein-Lockhart [2], [5] 参照)

さて、いよいよ主定理の証明について述べる。まず、命題の結果から $\tilde{\varphi}(\beta)<0$ となる β を探す。すると $$\frac{\operatorname{Res}_{s=1}\tilde{\varphi}(s)\cdot d^{\varepsilon}}{(1-\beta)\cdots(1+r-\beta)} \geqq c'$$ が得られるので、$\tilde{\varphi}(s)$ が ③' を満たせば主定理が得られる。従って $\tilde{\varphi}(\beta)<0$ なる適当な β を見つける

ことと③′の条件をチェックすることが証明のポイントである。 $\frac{1}{4} > \varepsilon_1 > 0$ を fix する。

<u>Case 1</u>　$\varphi(s,\chi)$ が $1-\varepsilon_1 \leqq \sigma \leqq 1$ で奇数個の real zero を持つと仮定。

$\varphi(s,\chi)$ は①を満たし、$s=1$ で2位の の を持つので、$\varphi(s,\chi) \to +\infty$ as $s \to 1-0$ が分かる。つまり $\beta = 1-\varepsilon_1$ とすると仮定より $\varphi(\beta,\chi) \leqq 0$。更に $\varphi(s,\chi)$ は③′の条件を満たしている。よって この場合は主張を得られる。

<u>Case 2</u>　$\varphi(s,\chi)$ が $1-\varepsilon_1 \leqq \sigma \leqq 1$ で偶数個(0コも含む)の real zero を持つと仮定。

(i) 仮定の $\varphi(s,\chi)$ の zero のうち少くとも1つが $\varphi(s,\chi)$ の因子 $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の zero である場合。

この $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ を $L_{f\otimes g}(s,\chi_1)$ とし、その real zero を β_1 として $\beta = \beta_1$ とする。$\varphi(s,\chi_1,\chi_2)$ を用いて $\chi_1 \neq \chi_2$ なる全ての χ_2 について主定理が成立することを示す。この議論は Dirichlet L 関数や $L_{f\otimes f}(s,\chi)$ の時の議論と同じなので ここでは説明を省略する。(Hoffstein-Lockhart [2] にその議論は分かりやすくまとめられている。)

(ii) $\varphi(s,\chi)$ の因子 $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ は $1-\varepsilon_1 \leqq \sigma \leqq 1$ で real zero を持たない場合

①③′を満たすが②′を満たさない補助関数しか作れない場合、このケースを考える必要がある。ここで新しいタイプの補助関数 $\varphi_0(s,\chi)$ が活躍する。まず $\varphi_0(s,\chi)$ は①,②′を満たしているので $\varphi_0(s,\chi) \to -\infty$ as $s \to 1-0$ がすぐ分かる。よって $\beta = 1-\varepsilon_1$ とすると仮定より $\varphi_0(s,\chi) \leqq 0$。さて、$\varphi_0(s,\chi)$ は一般には③′を満たすか分からない。しかし、この(ii)の場合は③′を満たしている。

実際に　㊟ … $L'_{f\otimes g}(1,\chi) \ll L_{f\otimes g}(1,\chi)\, d^{\varepsilon}$ を確めれば、$\varphi_0(s,\chi)$ の定義より $L_{f\otimes g}(1,\chi) \ll d^{\varepsilon}$ に注意すると③′の成立が分かる。よって ㊟が成立していることを説明する。まず Perelli [7] によって一般に

$$\frac{L'_{f\otimes g}}{L_{f\otimes g}}(1,\chi) = \sum_{\substack{\rho:\,\mathrm{zero} \\ 0\le \mathrm{Re}\,\rho\le 1 \\ 0\le \mathrm{Im}\,\rho\le 1}} \frac{1}{1-\rho} + O(\log d)$$

が得られている。ここで [3],[4] の $L_{f\otimes g}(s,\chi)$ の zero-free region の結果（定理1に相当）より $\sum_{\rho\neq \mathrm{real\ zero}} \frac{1}{1-\rho} \ll \sum \log d \ll d^{\varepsilon}$ が分かり、更に (ii) の仮定より $\sum_{\rho=\mathrm{real\ zero}} \frac{1}{1-\rho} \ll \sum \frac{1}{\varepsilon_1} \ll d^{\varepsilon}$ が得られる。（Perelli [7] によって $\sum_{\substack{\rho:\,\mathrm{zero} \\ |\mathrm{Im}\,\rho|<1}} 1 \ll d^{\varepsilon}$ も分かっている）。
従って $\frac{L'_{f\otimes g}}{L_{f\otimes g}}(1,\chi) \ll d^{\varepsilon}$ が導けて、(#) が示される。
このことより $\varphi_0(s,\chi)$ が ③′ を満たすことが分かるのである □

References

[1] H. Davenport, Multiplicative Number Theory (Second ed.), Springer-Verlag 1980

[2] J. Hoffstein and P. Lockhart, Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, Ann. of Math. 140 (1994) 161-181.

[3] Y. Ichihara, The Siegel-Walfisz theorem for Rankin-Selberg L-functions associated with two cusp forms, Acta Arith. 92 no3 (2000), 215-227.

[4] 市原由美子, 2つの cusp form の Fourier 係数の積に対する算術級数の素数定理と Rankin-Selberg L 関数の zero-free region, 数理解析研究所講究録 1091 (1999), 27-35.

[5] Y. Ichihara and K. Matsumoto, An analogue of the Siegel-Tatuzawa theorem for Rankin-Selberg L-functions, preprint.

[6] W. Li, L-series of Rankin type and their functional equations, Math. Ann. 244 (1979), 135-166.

[7] A. Perelli, General L-functions, Ann. Mat. Pura Appl. 130 (1982) 287-306.

[8] A. Perelli, On the prime number theorem for the coefficients of certain modular forms, in Banach Center Publ. 17, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa (1985) 405-410

[9] T. Tatuzawa, On a theorem of Siegel, Japanese J. Math. 21 (1951) 163-178.